XVII Jornada de l'ACG
22 de febrer de 2025

GeoGebra,
la peça que et falta a l'aula.

Divisió euclidiana: cinc exemples

David Arso Civil
INS Miquel Tarradell (Raval, Barcelona)
darso@xtec.cat

La divisió euclidiana

La divisió euclidiana s'explica a Primària, amb nombres naturals, i a Secundària, amb polinomis.

Anem a veure com es defineix la divisió euclidiana amb nombres enters.

Sabem que, donats dos nombres $a \in \mathbb{Z}$ i $b \neq 0$, $b \in \mathbb{Z}$, existeixen dos nombres $q \in \mathbb{Z}$ i $r \in \mathbb{Z}$ tals que

$$a = b \cdot q + r, \quad 0 \leq r < |b|.$$

A més, q i r són únics.

Cinc exemples

Explicarem cinc exemples, no molt coneguts, que estan relacionats amb la divisió euclidiana.

Fent servir Geogebra us presentarem, per a cada exemple, una interpretació geomètrica i de mesura de propietats que, d'un primer cop d'ull, classificaríem com a aritmètiques.

Cinc exemples

Explicarem cinc exemples, no molt coneguts, que estan relacionats amb la divisió euclidiana

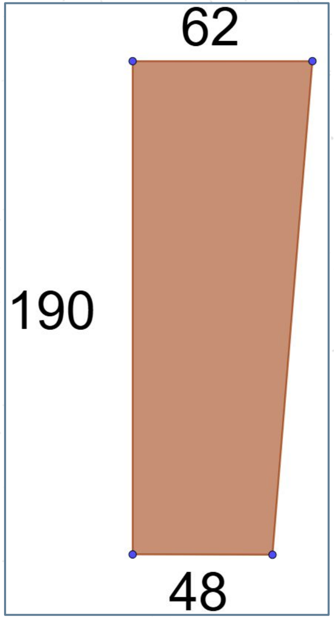
1. La màniga del jersei de punt.
2. Màxim comú divisor, Euclides i rectangles.
3. La progressió aritmètica, una fàbrica de quadrats perfectes.
4. Un octàgon i un pentàgon mal avinguts.
5. El mètode de Lill per trobar arrels de polinomis (1867).

Cinc exemples

1. **La màniga del jersei de punt.**
2. Màxim comú divisor, Euclides i rectangles.
3. La progressió aritmètica, una fàbrica de quadrats perfectes.
4. Un octàgon i un pentàgon mal avinguts.
5. El mètode de Lill per trobar arrels de polinomis (1867).

1. La màniga del jersei

Per fer confeccionar la màniga d'un jersei de punt cal tenir en compte que el puny necessita menys punts que l'ample de la màniga a l'altura de la sisa. Ho podem veure en aquest esquema:

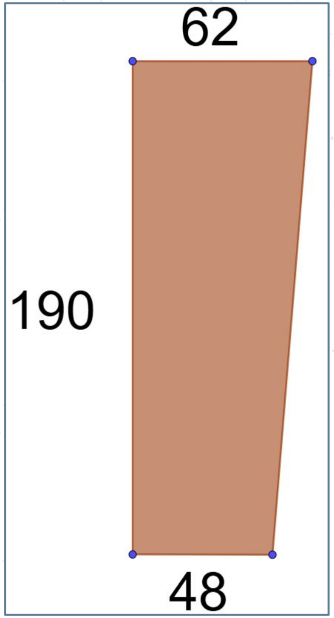


La diferència de punts s'haurà d'aconseguir al llarg de tota la màniga. En el nostre cas, cal passar (per cada banda) de 62 punts a 48 punts, al llarg de 190 voltes.

Anem a veure com la divisió euclidiana ens proporciona una possible tècnica de repartiment de punts i en farem una simulació amb Geogebra.

1. La màniga del jersei

Per fer confeccionar la màniga d'un jersei de punt cal tenir en compte que el puny necessita menys punts que l'ample de la màniga a l'altura de la sisa. Ho podem veure en aquest esquema:



La idea és que cal anar perdent (o *menguant*) un punt des dels 62 punts d'inici fins als 48 del final, de forma regular i "suau", és a dir, repartint aquesta pèrdua, d'alguna manera, al llarg de les 190 ocasions que hi ha.

Ja veiem que caldrà treballar amb la divisió i també amb aquests nombres: 190 i 14=(62-48)

Divisió euclidiana

Anem a veure alguns exemples.

La nostra primera solució consisteix en efectuar una divisió entera, amb quocient i residu.

La segona solució és una alternativa que consisteix, de fet, en “partir” el dividend en dues parts. Aquesta solució és, de fet, l’estratègia que farem servir per explicar el càlcul de punts de la màniga del jersei.

Divisió euclidiana

Sabem que, donats dos nombres $a \in \mathbb{Z}$ i $b \neq 0$, $b \in \mathbb{Z}$, existeixen dos nombres $q \in \mathbb{Z}$ i $r \in \mathbb{Z}$ tals que

$$a = b \cdot q + r, \quad 0 \leq r < |b|.$$

A més, q i r són únics.

Exemple 1

Anem a posar un exemple. Sigui $a = 18$ i $b = 7$. Llavors

$$18 = 7 \cdot 2 + 4.$$

El quocient és $q = 2$ i el residu és $r = 4$, i es compleix $0 \leq r < b$.

Si ens fixem només en els nombres $a = 18$ i $q = \boxed{2}$, observem que:

$$18 = 3 \cdot \boxed{2} + 4 \cdot \boxed{3}.$$

Divisió euclidiana

Exemple 2

Vegeu un altre exemple. Sigui $a = 190$ i $b = 14$. La divisió euclidiana proporciona la igualtat

$$190 = 14 \cdot 13 + 8$$

Observem que podem expressar el nombre $a = 190$ com

$$190 = 6 \cdot \boxed{13} + 8 \cdot \boxed{14}$$

Múltiples de nombres consecutius

Proposició

Si $a, b \in \mathbb{Z}^+$ i $b \neq 0$, llavors existeixen $q, u, v \in \mathbb{Z}^+$ tals que

$$a = u \cdot q + v \cdot (q+1),$$

amb $u > 0$, $v > 0$ i $u + v = b$.

Múltiples de nombres consecutius

Proposició

Si $a, b \in \mathbb{Z}^+$ i $b \neq 0$, llavors existeixen $q, u, v \in \mathbb{Z}^+$ tals que

$$a = u \cdot q + v \cdot (q+1),$$

amb $u > 0$, $v > 0$ i $u + v = b$.

Demostració. Sabem que es compleix la següent igualtat:

$$a = b \cdot q + r, \quad 0 \leq r < b.$$

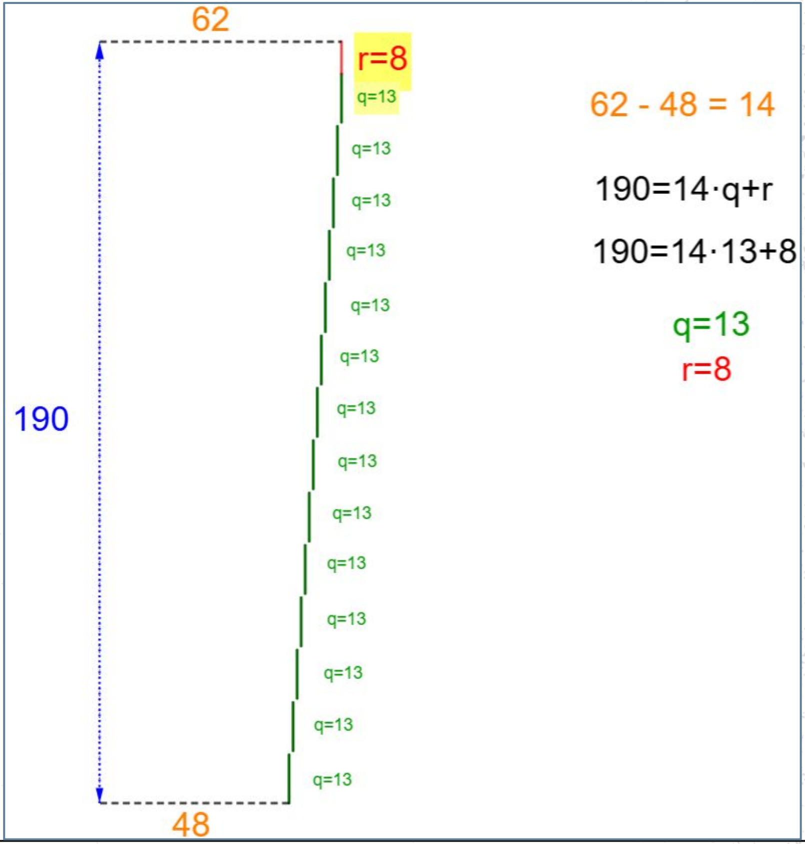
Reescrivim i endrecem els termes:

$$\begin{aligned} a &= (b - r + r) \cdot q + r \\ &= (b - r) \cdot q + r \cdot q + r \\ &= (b - r) \cdot q + r \cdot (q + 1). \end{aligned}$$

Només cal definir $u = b - r$ i $v = r$. Aleshores $u + v = b$.

La màniga: dues opcions

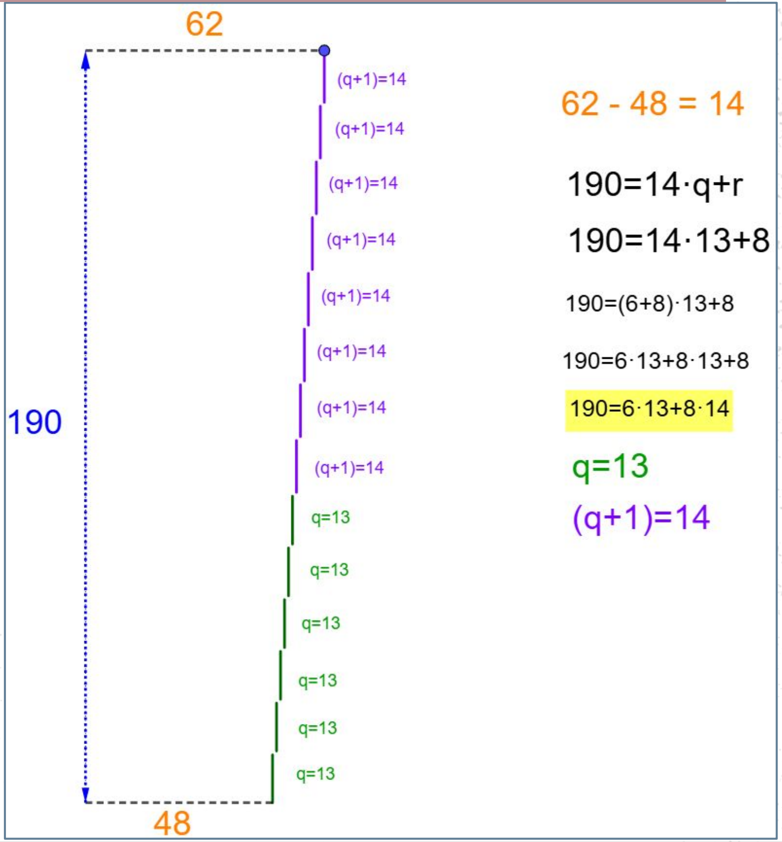
L'esquema següent representa la màniga d'un jersei. Com podem veure, en 190 voltes cal menguar 14 punts en total.
Una opció és menguar 1 punt cada 13 voltes i deixar les 8 últimes voltes sense menguar cap punt.



La màniga: dues opcions

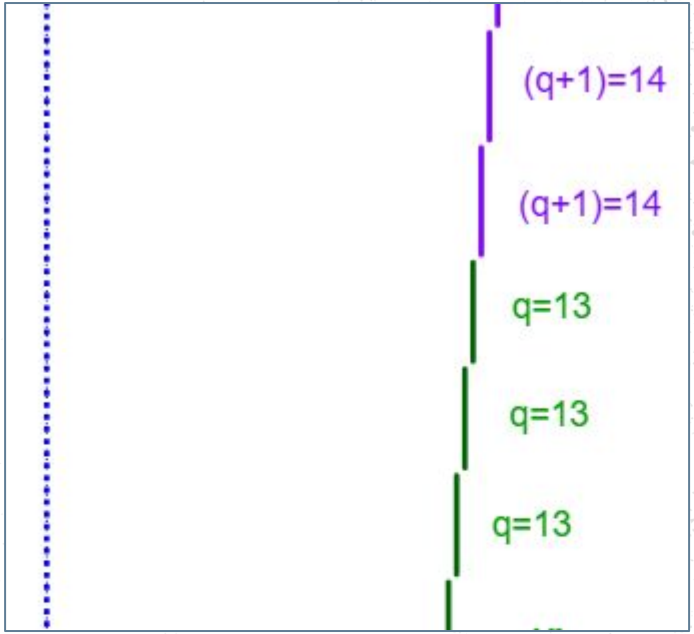
Una altra opció és:

- menguar 1 punt cada 13 voltes en 6 ocasions
- menguar 1 punt cada 14 voltes en 8 ocasions.



La màniga: dues opcions

La primera opció no és la preferida, en general, perquè la pèrdua de punts és menys regular. Podem comparar ambdues opcions en el moment on hi ha més diferència.



La màniga: Geogebra

ACG2025-p1(a)

ACG2025-p1(b)

Cinc exemples

1. La màniga del jersei de punt.

2. **Màxim comú divisor, Euclides i rectangles.**

3. La progressió aritmètica, una fàbrica de quadrats perfectes.

4. Un octàgon i un pentàgon mal avinguts.

5. El mètode de Lill per trobar arrels de polinomis (1867).

2. Màxim comú divisor, Euclides i rectangles

Per calcular el màxim comú divisor de dos nombres a i b, podem fer servir l'algorisme d'Euclides. La divisió entera ens garanteix l'existència de q i r:

$$a = b \cdot q + r, \quad 0 \leq r < b.$$

És important destacar que la darrera desigualtat és estricta.

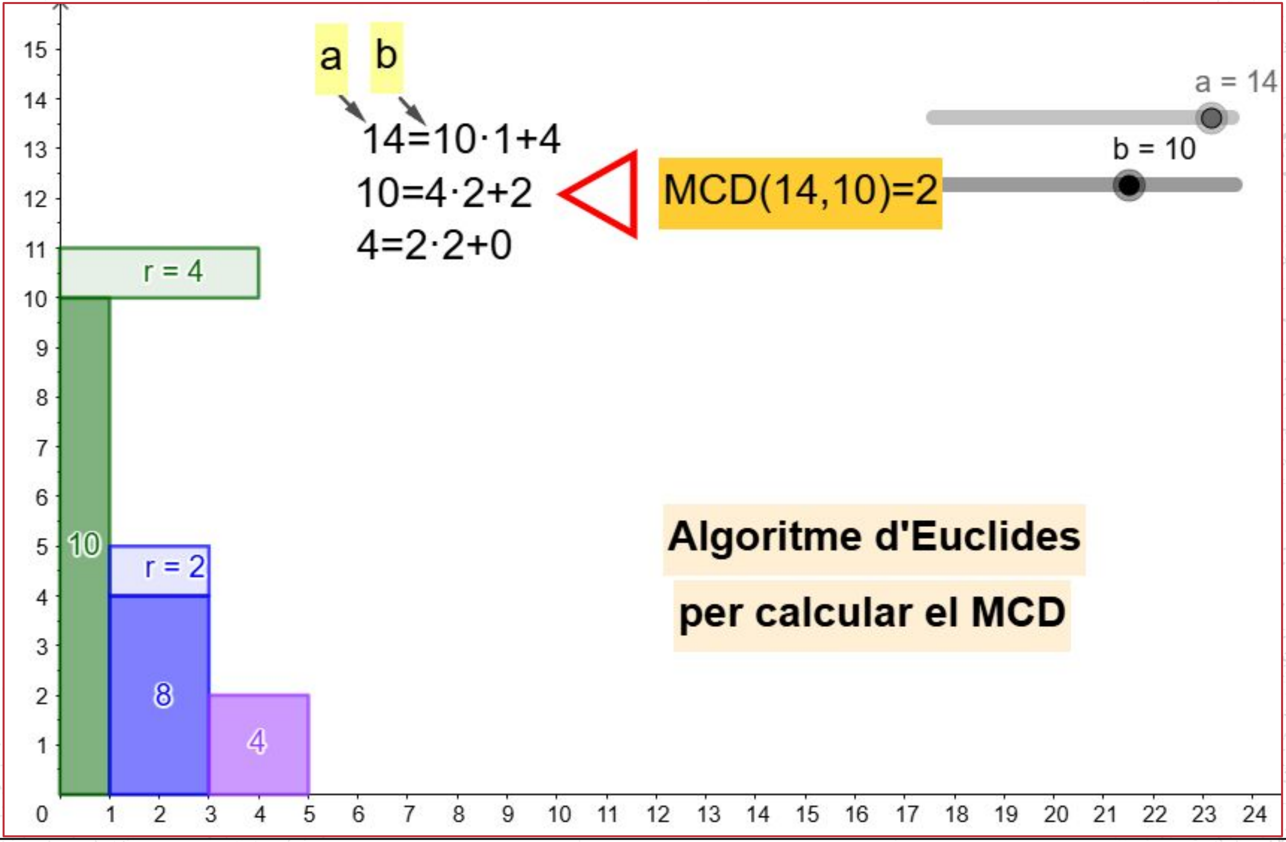
A més, observem que

$$\mathrm{mcd}(a, b) = \mathrm{mcd}(b \cdot q + r,\, b) = \mathrm{mcd}(r,\, b) = \mathrm{mcd}(b,\, r).$$

I per tant, en algun pas de l'algorisme tindrem $r = 0$ i haurem trobat el màxim comú divisor

$$\mathrm{mcd}(r \cdot q + 0,\, b) = r$$

En la nostra representació de l'algorisme d'Euclides, en cada pas dibuixem un rectangle de costats b i q i un altre rectangle de costats r i 1. Per tant, la suma de les àrees dels rectangles val a.



2. Màxim comú divisor, Euclides i rectangles

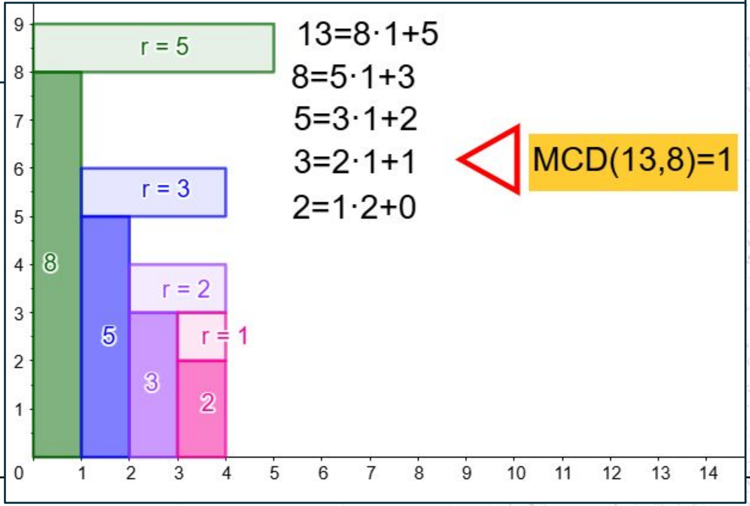
Observem que el cas on l'algorisme necessita més iteracions és quan a i b són nombres consecutius de la successió de Fibonacci:

$$F_n = F_{n-1} \cdot q + r.$$

Sabem que $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, per tant $q = 1$ i $r = F_{n-2}$. És a dir, que a la següent iteració tindrem

$$F_{n-1} = F_{n-2} \cdot 1 + F_{n-3},$$

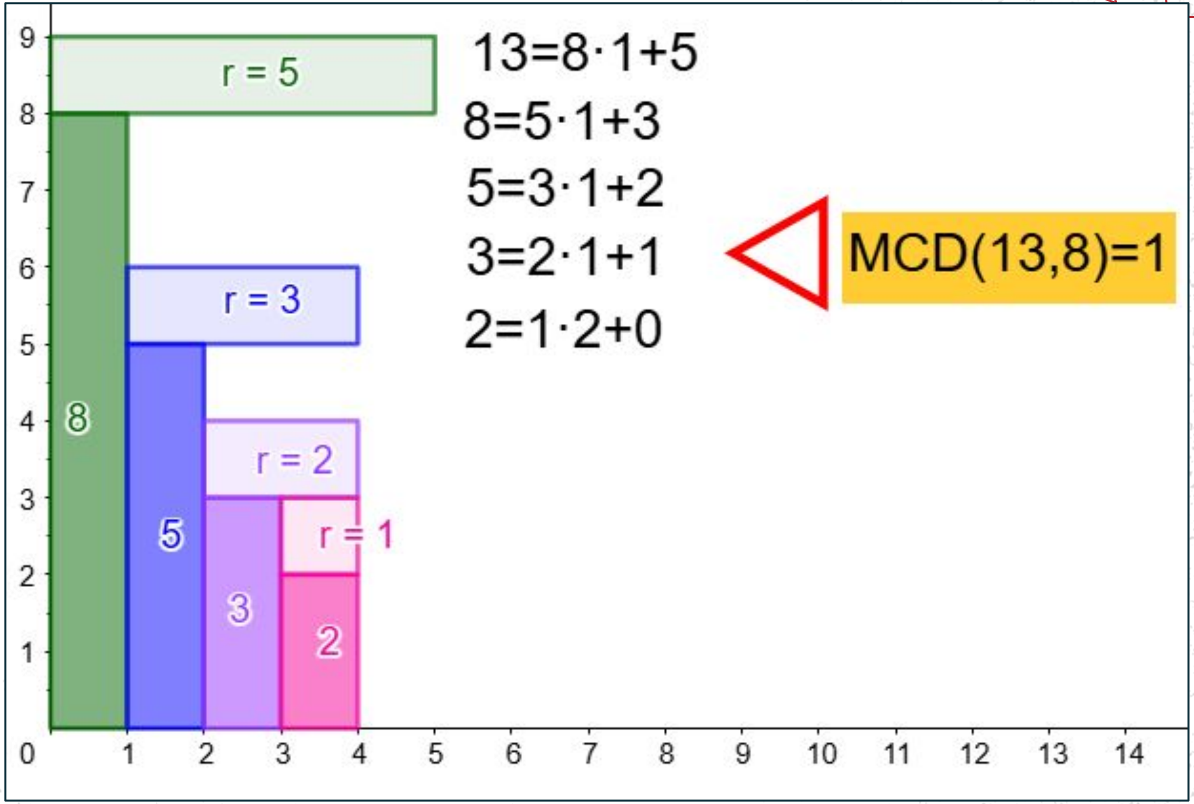
i els quocients sempre valen 1.



2. Màxim comú divisor, Euclides i rectangles

El fet que el residu sigui estrictament inferior que el divident ens garanteix que la construcció de rectangles amb Geogebra sempre estarà ben feta.

A cada iteració l'altura assolida pels dos rectangles és "r+1", que no pot ser superior a l'altura del rectangle anterior, perquè és "b".

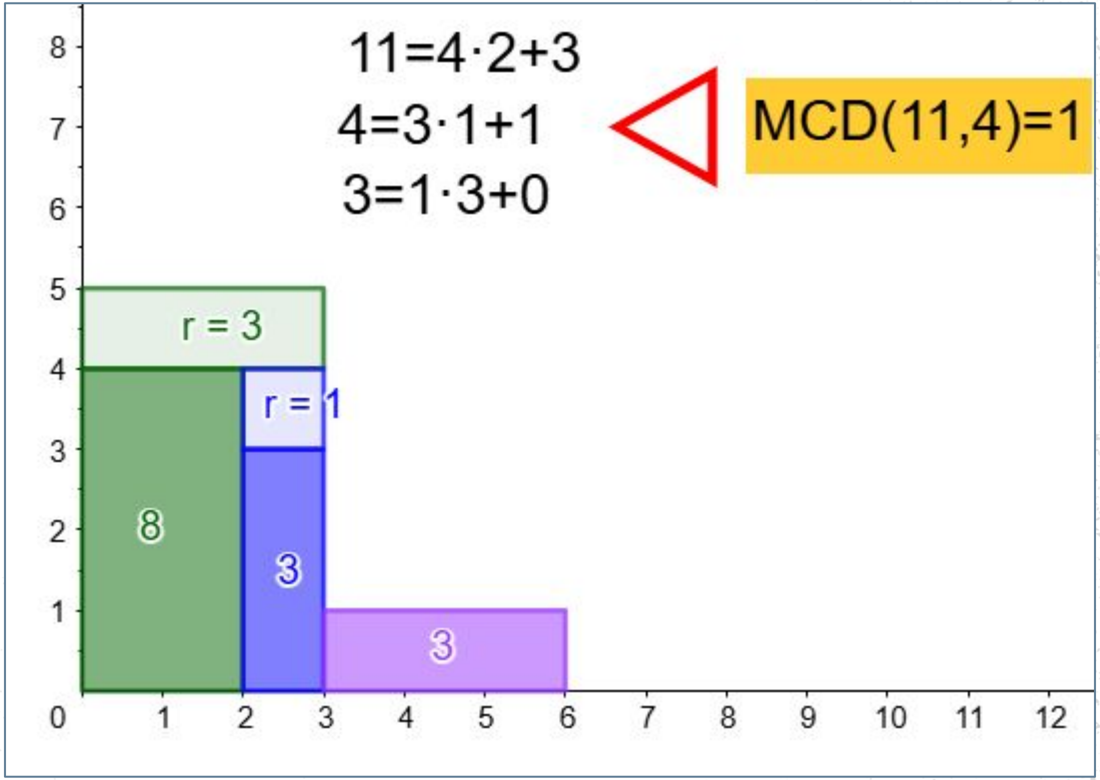


2. Màxim comú divisor, Euclides i rectangles

El fet que el residu sigui estrictament inferior que el divident ens garanteix que la construcció de rectangles amb Geogebra sempre estarà ben feta.

A cada iteració l'altura assolida pels dos rectangles és "r+1", que no pot ser superior a l'altura del rectangle anterior, perquè és "b".

En aquest exemple, inicialment:
a=11, **b=4**, q=2, **r=3**
i a la següent iteració l'altura del rectangle serà r+1=4



2. Màxim comú divisor: Geogebra

ACG2025-p2

Cinc exemples

1. La màniga del jersei de punt.

2. Màxim comú divisor, Euclides i rectangles.

3. **La progressió aritmètica, una fàbrica de quadrats perfectes.**

4. Un octàgon i un pentàgon mal avinguts.

5. El mètode de Lill per trobar arrels de polinomis (1867).

3. Progressió aritmètica i quadrats perfectes

Exemple 1

La successió següent és una progressió aritmètica de diferència $d = 5$:

$$2,\ 7,\ 12,\ 17,\ \ldots$$

3. Progressió aritmètica i quadrats perfectes

Exemple 1

La successió següent és una progressió aritmètica de diferència $d = 5$:

$$2,\ 7,\ 12,\ 17,\ \ldots$$

Aquesta progressió no conté cap quadrat perfecte, perquè tots els elements acaben en 2 i 7. En canvi, els quadrats perfectes només poden acabar en $0, 1, 4, 5, 6$ o 9:

$$0^2 = 0, \quad 1^2 = 1, \quad 2^2 = 4, \quad 3^2 = 9, \quad 4^2 = 16, \quad 5^2 = 25, \quad 6^2 = 36, \quad 7^2 = 49, \quad 8^2 = 64, \quad 9^2 = 81, \ldots$$

Per tant, aquesta progressió no conté cap quadrat perfecte.

3. Progressió aritmètica i quadrats perfectes

Exemple 2

Considerem la progressió aritmètica de diferència 8:

$$A = \{\boxed{4}, 12, 20, 28, 36, 44, 52, 60, 68, 76, 84, 92, 100, 108, 116, 124, \ldots\}.$$

Veiem que 4 és quadrat perfecte i ens preguntem si aquesta progressió conté més quadrats perfectes.

3. Progressió aritmètica i quadrats perfectes

Exemple 2

Considerem la progressió aritmètica de diferència 8:

$$A = \{\boxed{4}, 12, 20, 28, 36, 44, 52, 60, 68, 76, 84, 92, 100, 108, 116, 124, \ldots\}.$$

Veiem que 4 és quadrat perfecte i ens preguntem si aquesta progressió conté més quadrats perfectes. Explorem els primers termes:

$$A = \{\boxed{4}, 12, 20, 28, \boxed{36}, 44, 52, 60, 68, 76, 84, 92, \boxed{100}, 108, 116, 124, \ldots\}.$$

$$\{4,\ 36,\ 100\} \subset A,$$

Vegem que, de fet, aquesta progressió aritmètica conté infinits quadrats perfectes.

3. Progressió aritmètica i quadrats perfectes

$$A = \{\boxed{4}, 12, 20, 28, 36, 44, 52, 60, 68, 76, 84, 92, 100, 108, 116, 124, \ldots\}.$$

Considerem $a_1 \in A$. Si $a_1 = n^2$ és un quadrat perfecte, definim a_2

$$a_2 = (n+8)^2 = n^2 + 2\,n\,8 + 8^2 = n^2 + 8\,(2n+8).$$

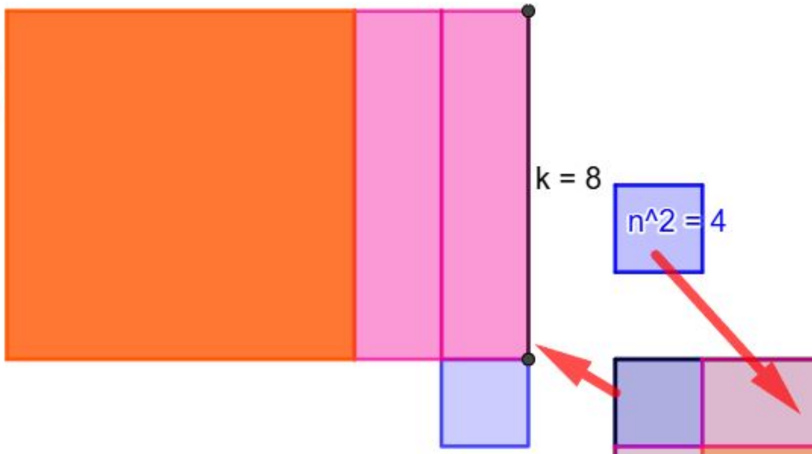
a_2 és un quadrat perfecte per construcció. A més, és un element de la progressió perquè la diferència amb a_1 és un múltiple de $d = 8$.

D'aquesta manera podem anar trobant nous quadrats perfectes dins la mateixa progressió de forma indefinida.

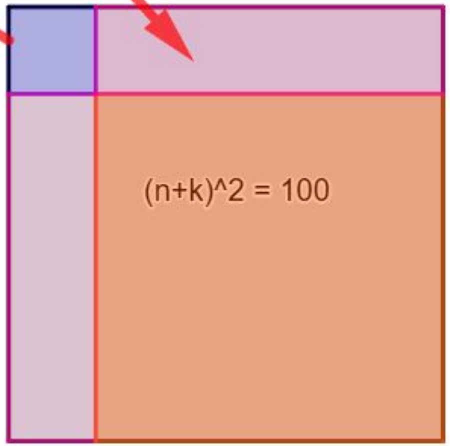
3. Progressió aritmètica i quadrats perfectes

4, 12,20,28,36,44,52,60,68,76,84,

92,100,108,116,124,132,140,148,156,164,...



$$A = \{\boxed{4}, 12, 20, 28, \boxed{36}, 44, 52, 60, 68, 76, 84, 92, \boxed{100}, 108, 116, 124, \ldots\}$$



3. Progressió aritmètica i quadrats perfectes

ACG2025-p3

3. Progressió aritmètica i quadrats perfectes

a	2																						
d	7																						

Anem a estudiar una possible aplicació de la divisió euclídea en el context de progressions aritmètiques i quadrats perfectes.

Farem l'exemple següent: una progressió aritmètica de terme inicial a=2 i diferència d=7

3. Progressió aritmètica i quadrats perfectes

a	2																						
d	7																						
2	**9**	**16**	23	30	37	44	51	58	65	72	79	86	93	**100**	107	114	**121**	128	135	142	149	156	163
170	177	184	191	198	205	212	219	226	233	240	247	254	261	268	275	282	**289**	296	303	310	317	324	331

Podem observar que la progressió aritmètica conté quadrats perfectes.

3. Progressió aritmètica i quadrats perfectes

a	2																						
d	7																						
2	9	16	23	30	37	44	51	58	65	72	79	86	93	100	107	114	121	128	135	142	149	156	163
170	177	184	191	198	205	212	219	226	233	240	247	254	261	268	275	282	**289**	296	303	310	317	324	331

Suposem, per un moment, que només destaquem el quadrat perfecte 289, tot i que acabem de comprovar que no és **el primer** quadrat perfecte que apareix.

3. Progressió aritmètica i quadrats perfectes

a	2																						
d	7																						
2	…																						
																…	**289**						

Si d’una progressió aritmètica només coneixem el terme inicial a=2, la diferència d=7 i sabem que en algun moment la progressió conté el quadrat perfecte 289….

Quin és el primer quadrat perfecte que apareix a la progressió aritmètica?

3. Progressió aritmètica i quadrats perfectes

a	2																						
d	7																						
2	…																						
																…	**289**						

$289 = 17^2$

Efectuem la divisió euclídea entre 17 i d=7

3. Progressió aritmètica i quadrats perfectes

a	2																						
d	7																						
2	…																						
																…	**289**						

$289 = 17^2$

$17 = d \cdot q + r$
$17 = 7 \cdot q + r$
$17 = 7 \cdot 2 + 3$

$r = 3$

Ara, elevem al quadrat el residu…

3. Progressió aritmètica i quadrats perfectes

a	2																						
d	7																						
2	**9**	**16**	23	30	37	44	51	58	65	72	79	86	93	**100**	107	114	**121**	128	135	142	149	156	163
170	177	184	191	198	205	212	219	226	233	240	247	254	261	268	275	282	**289**	296	303	310	317	324	331

$289 = 17^2$

$17 = d \cdot q + r$
$17 = 7 \cdot q + r$
$17 = 7 \cdot 2 + 3$

$r = 3$
$r^2 = \boxed{9}$

Aquest mètode serveix per trobar un quadrat perfecte anterior a 289...però no garanteix que sigui el primer quadrat perfecte de la progressió.

És a dir, que si bé en aquest cas sí que ens l'ha proporcionat, no sempre funciona. Cal seguir investigant...

Cinc exemples

Associació Catalana GeoGebra
ACGeoGebra.cat

1. La màniga del jersei de punt.
2. Màxim comú divisor, Euclides i rectangles.
3. La progressió aritmètica, una fàbrica de quadrats perfectes.
4. **Un pentàgon i octògon mal avinguts.**
5. El mètode de Lill per trobar arrels de polinomis (1867).

4. Un pentàgon i octògon mal avinguts

4. Un pentàgon i octògon mal avinguts

Podem veure que el tamboret té 5 potes, que formen els radis d'un pentàgon regular. Al seu torn, el seient de color marró té 8 marques, que corresponen als radis d'un octògon regular.

4. Un pentàgon i octògon mal avinguts

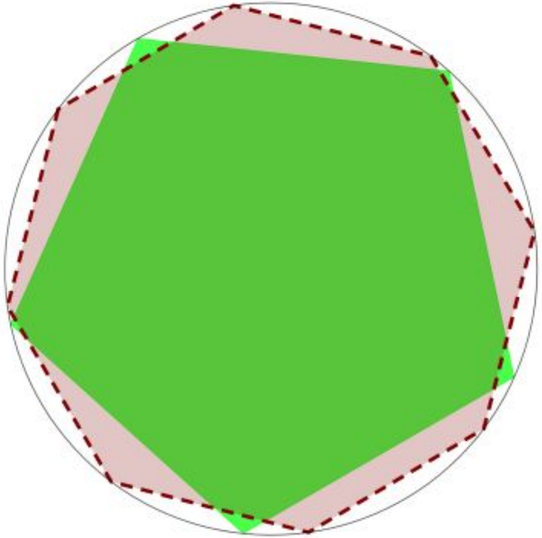
Abans de fer la fotografia s'ha rotat les 5 potes del tamboret amb la intenció de separar-les suficientment de les 8 marques del seient.

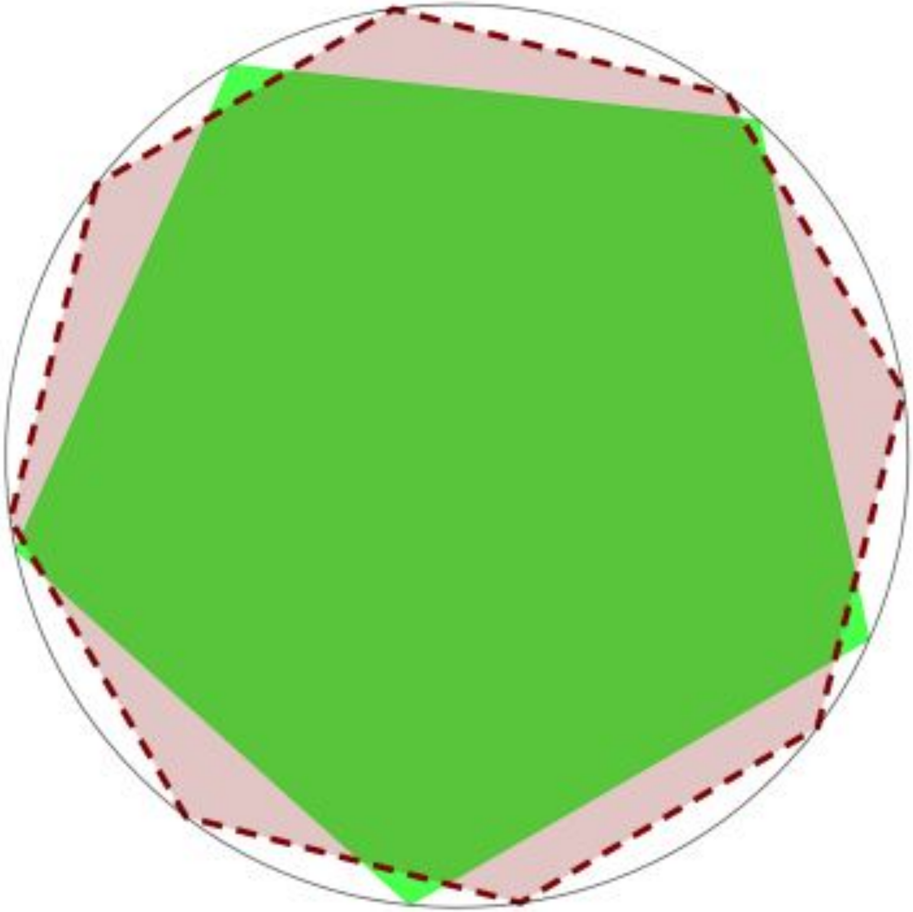
Es pot intuir a la imatge que que aquesta separació mai arriba a ser massa gran. Anem a mesurar-ho.

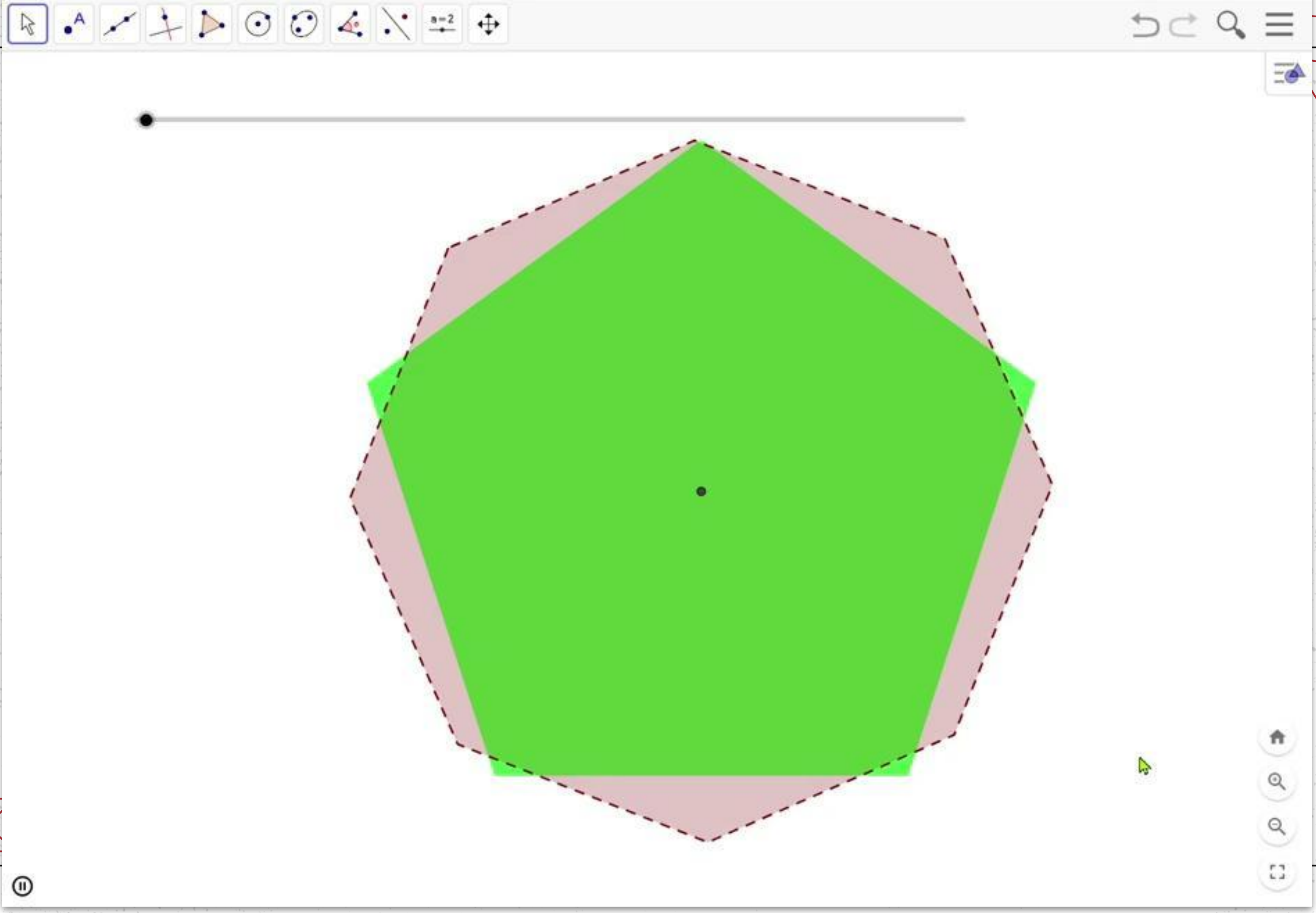
4. Un pentàgon i octògon mal avinguts

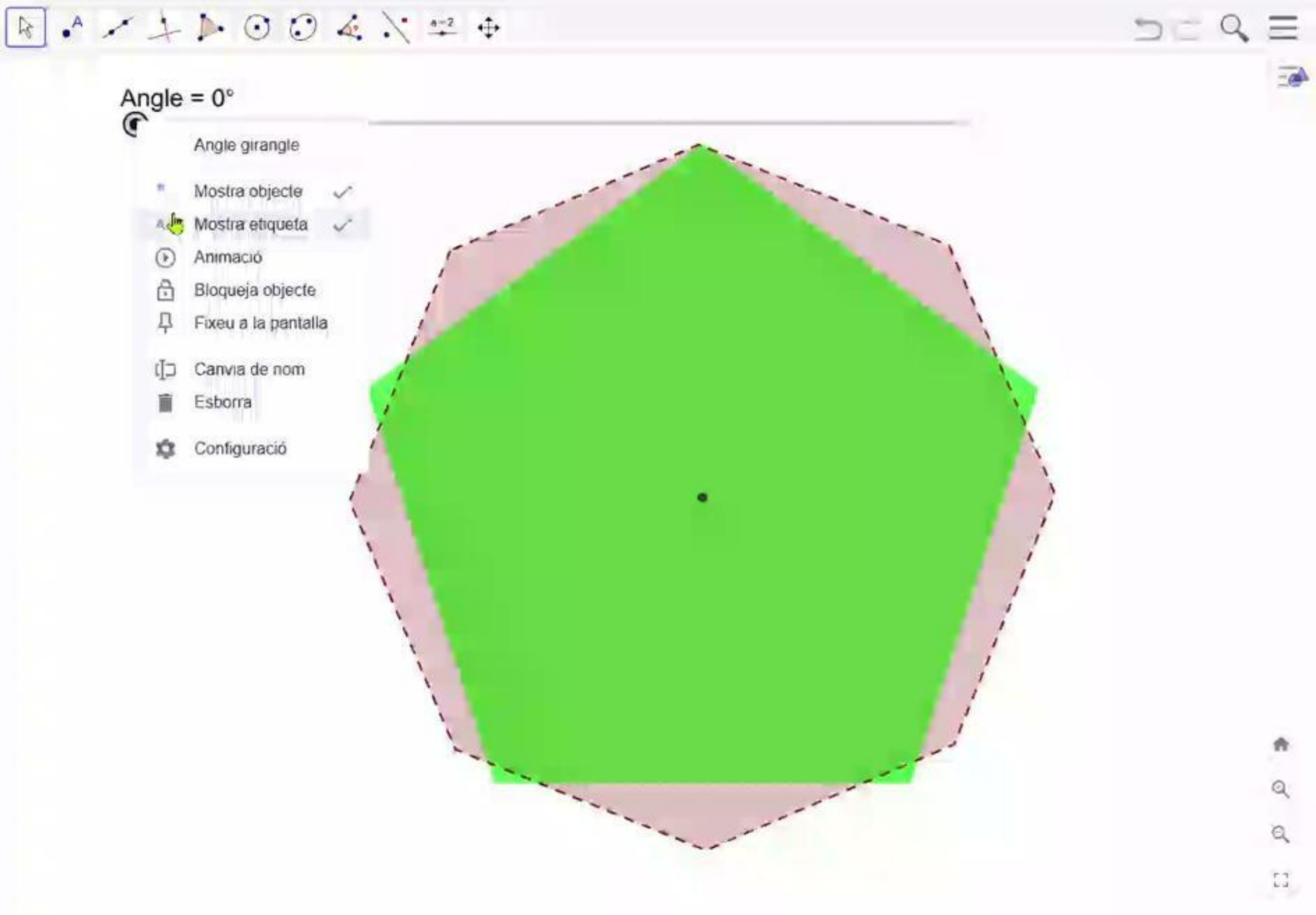
Abans de fer la fotografia s'ha rotat les 5 potes del tamboret amb la intenció de separar-les suficientment de les 8 marques del seient.

Es pot intuir a la imatge que que aquesta separació mai arriba a ser massa gran. Anem a mesurar-ho.





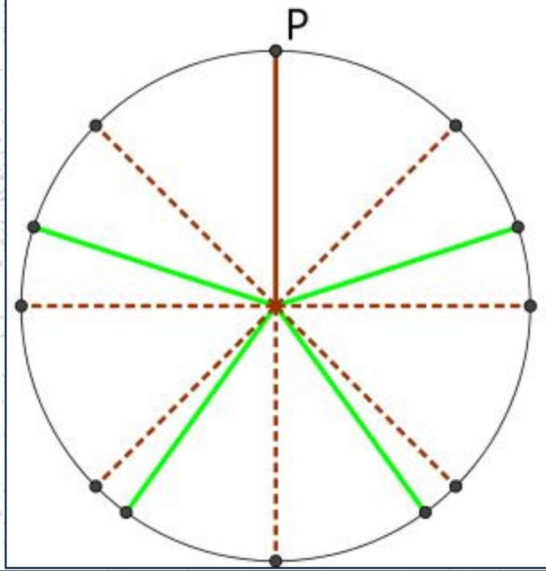



Angle = 0°
Angle girangle
Mostra objecte
Mostra etiqueta
Animació
Bloqueja objecte
Fixeu a la pantalla
Canvia de nom
Esborra
Configuració

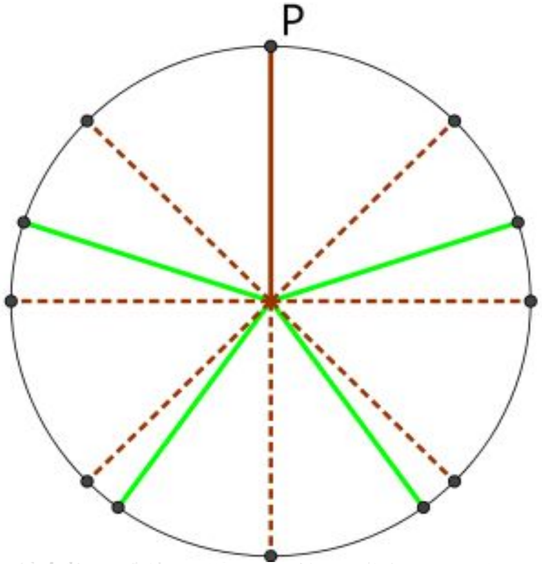
4. Un pentàgon i octògon mal avinguts

Podem assumir, per començar, que el pentàgon i l'octògon comparteixen la mateixa circumferència circumscrita i que tenen un punt en comú. Obtenim aquesta disposició quan una pota del tamboret tapa completament una marca del seient.

La figura següent mostra els 5 radis del pentàgon, els 8 radis de l'octògon i el punt P que tenen en comú.



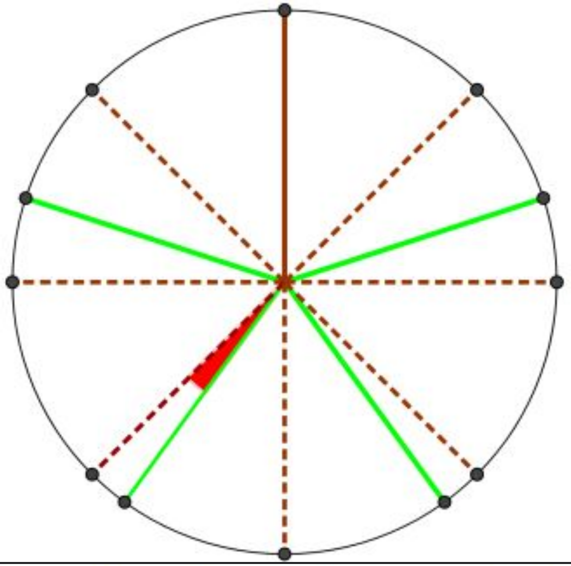
4. Un pentàgon i octògon mal avinguts



Estudiem el valor de l'angle comprès entre dos radis qualssevol del pentàgon i de l'octògon. Restem les dues fraccions anteriors:

$$a \cdot \frac{2\pi}{5} - b \cdot \frac{2\pi}{8} = 2\pi \cdot \frac{8a - 5b}{40}$$

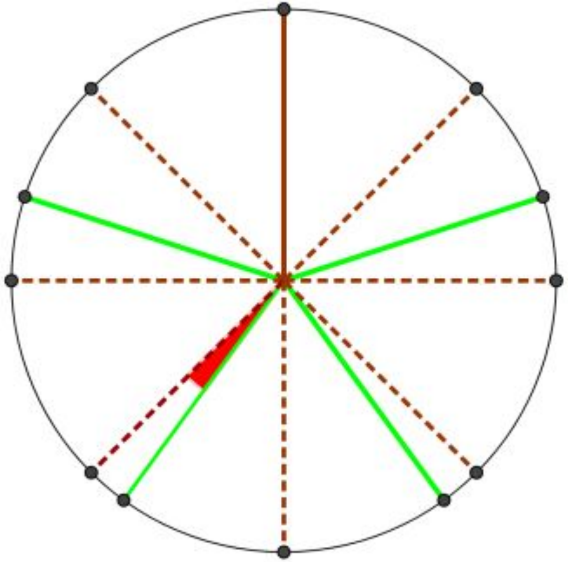
4. Un pentàgon i octògon mal avinguts



La imatge ens suggereix donar els valors $a = 2$ i $b = 3$, perquè sembla el cas on els radis d'un pentàgon i octògon no coincidents descriuen un angle més petit. Fent càlculs trobem que l'angle comprès val el següent:

$$2 \cdot \frac{2\pi}{5} - 3 \cdot \frac{2\pi}{8} = 2\pi \cdot \frac{1}{40} = \frac{2\pi}{40}$$

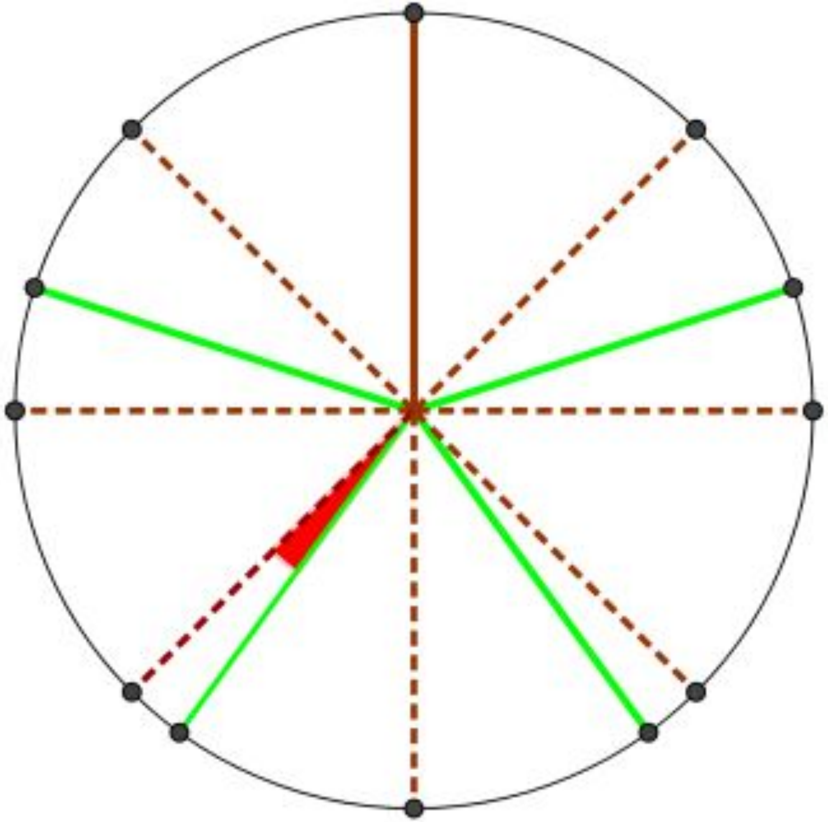
4. Un pentàgon i octògon mal avinguts



En conclusió, l'angle mínim, en valor absolut, que formen els radis d'un pentàgon i un octògon regular és el següent, expressat en radiants i en graus:

$$\alpha = \frac{\pi}{40}\ \text{rad} = 4,5^\circ$$

4. Un pentàgon i octògon mal avinguts



4. Un pentàgon i octògon mal avinguts

ACG2025-p4

Cinc exemples

1. La màniga del jersei de punt.
2. Màxim comú divisor, Euclides i rectangles.
3. La progressió aritmètica, una fàbrica de quadrats perfectes.
4. Un pentàgon i octògon mal avinguts.
5. **El mètode de Lill per trobar arrels de polinomis (1867).**

5. Mètode de Lill

El mètode de Lill (1867) proporciona un mètode gràfic per trobar arrels de polinomis de forma aproximada.

Sabem que $x=a$ és una arrel d'un polinomi $p(x)$ si i només si la divisió entera de $p(x)$ entre $(x-a)$ té com a residu $r=0$

5. Mètode de Lill

El mètode de Lill (1867) proporciona un mètode gràfic per trobar arrels de polinomis de forma aproximada.

Anem a estudiar un exemple, treballant amb un polinomi de grau 3.

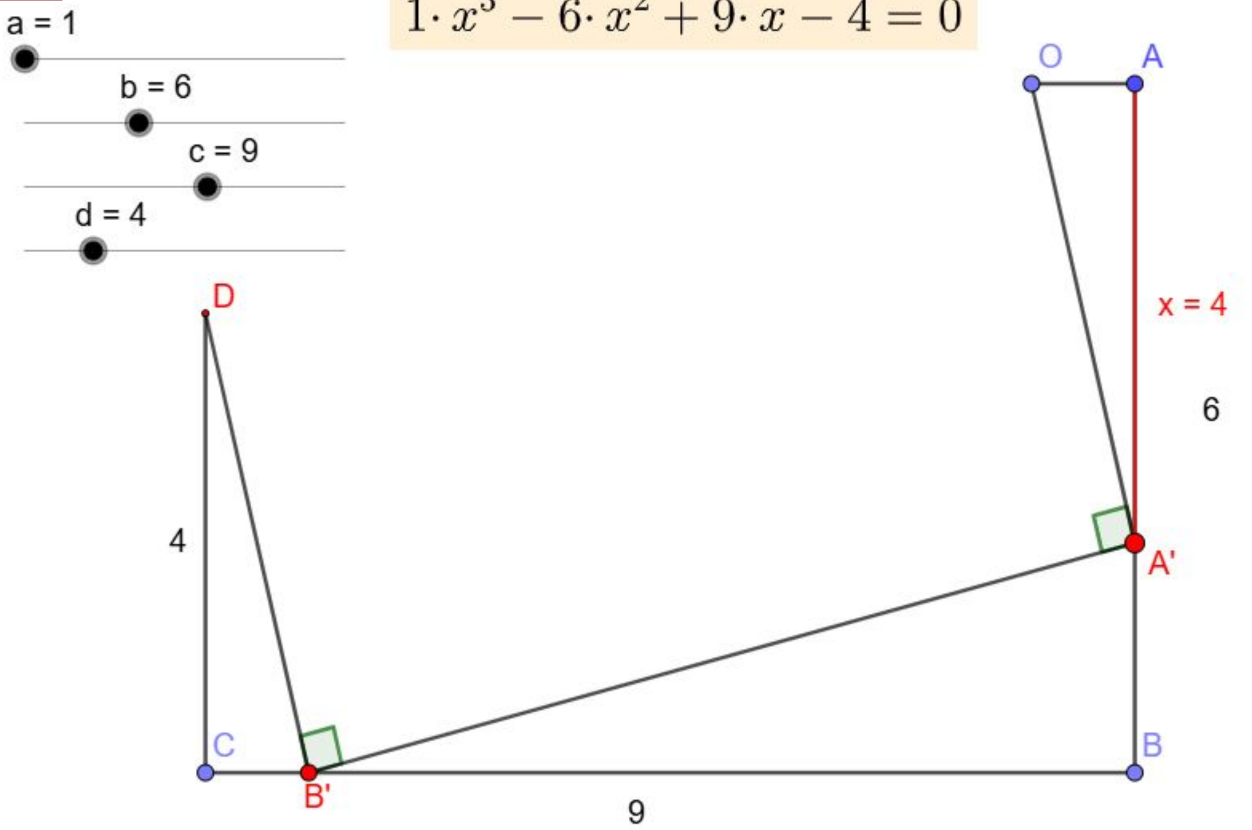
5. Mètode de Lill

Anem a trobar una solució d'aquesta equació polinòmica o, de forma equivalent, les arrels d'aquest polinomi de grau 3.

Podem comprovar, substituint, que x = 4 és una solució de l'equació.

Observem que per anar del punt O al punt D hi ha dos camins marcats. En els dos camins hi veiem angles rectes.

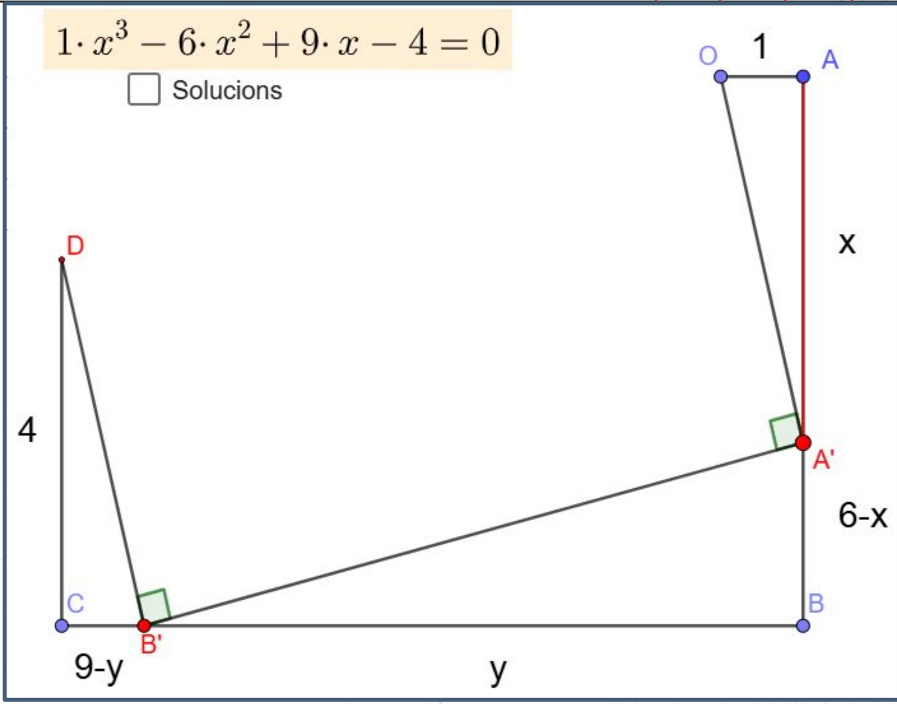
$$1 \cdot x^3 - 6 \cdot x^2 + 9 \cdot x - 4 = 0$$



Proposició

La longitud x del segment AA' és una solució de l'equació:

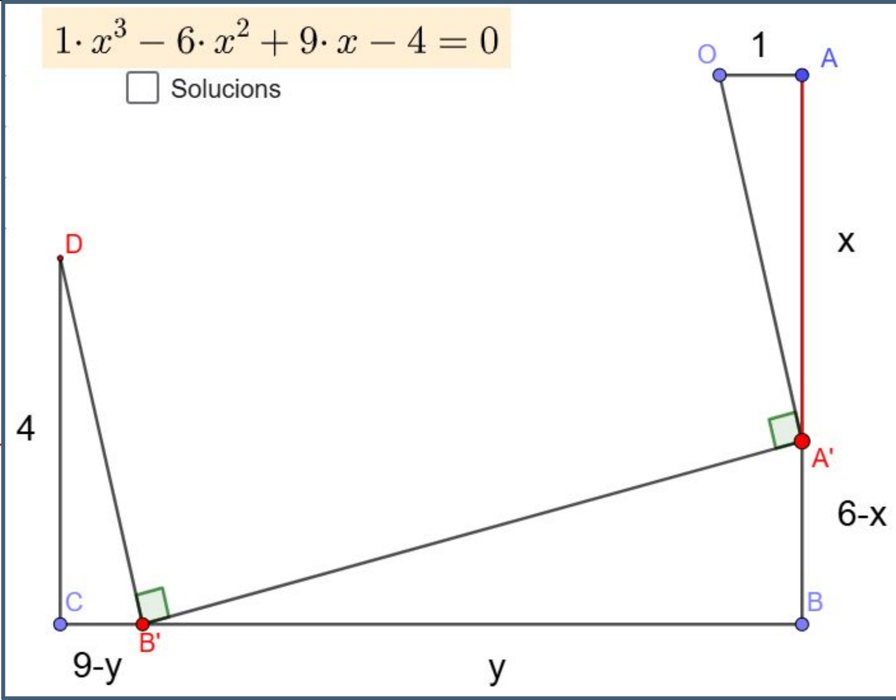
$$x^3 - 6x^2 + 9x - 4 = 0.$$



Proposició

La longitud x del segment AA' és una solució de l'equació:

$$x^3 - 6x^2 + 9x - 4 = 0.$$



Demostració

Els triangles següents són semblants:

$$A'AO, \quad B'BA', \quad DCB'.$$

Això és degut a que per a cada triangle veiem dos angles complementaris. Però aquesta relació també es compleix entre dos triangles diferents, degut al camí $OA'B'D$.

$$\frac{1}{x} = \frac{6-x}{y} = \frac{9-y}{4}.$$

Expressant y en funció de x:

$$y = x\,(6-x).$$

Per tant,

$$\frac{1}{x} = \frac{9-y}{4} \implies \frac{1}{x} = \frac{9-x\,(6-x)}{4}$$

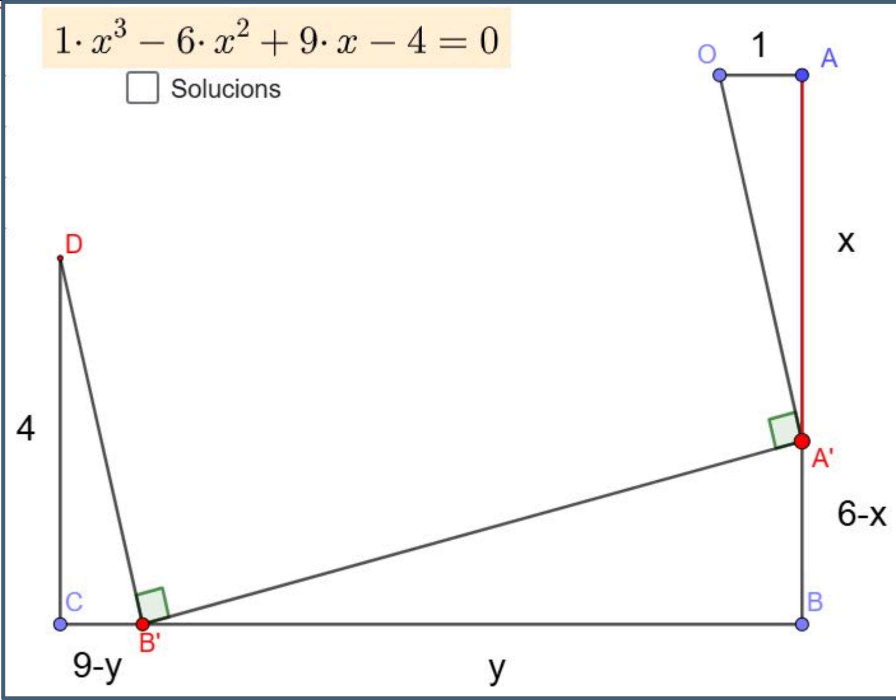
D'aquí obtenim

$$4 = x\left[9 - x\,(6-x)\right] = 9\,x - 6\,x^2 + x^3$$

Reordenant els termes:

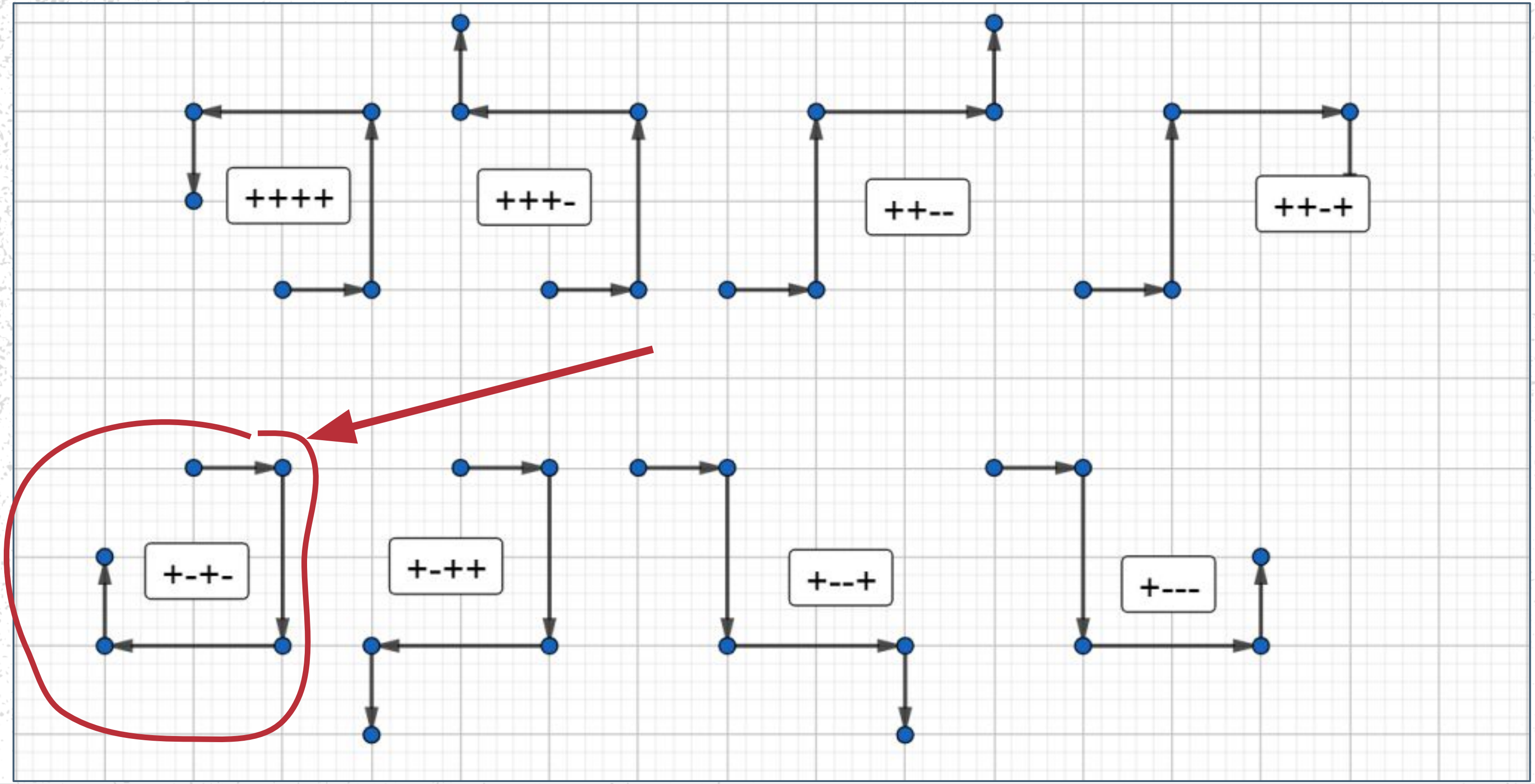
$$x^3 - 6\,x^2 + 9\,x - 4 = 0,$$

com volíem demostrar.



5. Mètode de Lill

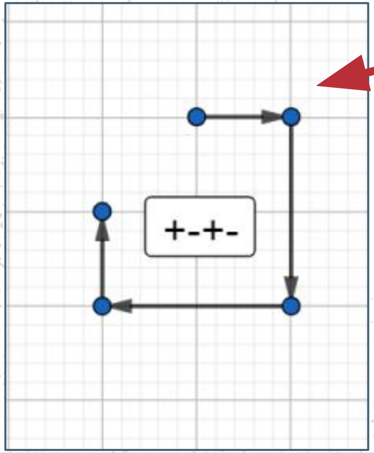
$ax^3 + bx^2 + cx + d$



5. Mètode de Lill

$ax^3 + bx^2 + cx + d$

$a > 0$
$b < 0$
$c > 0$
$d < 0$



5. Mètode de Lill

https://www.geogebra.org/classic/wqjmgfgd

XVII Jornada de l'ACG

22 de febrer de 2025

GeoGebra, la peça que et falta a l'aula.

Associació Catalana GeoGebra

ACGeoGebra.cat

Gràcies per la vostra atenció.

Gràcies a l'ACG per l'organització.

David Arso Civil

INS Miquel Tarradell

darso@xtec.cat